TD 7 : Chaînes de Markov

Recherche opérationnelle S3.

2024

Exercice 1 — *Pierre Feuille Ciseau Lézard Spock*

Voici les règles de pierre feuille ciseaux adaptées par le Docteur Sheldon Cooper : les ciseaux coupent la feuille ; la feuille recouvre la pierre ; la pierre écrase le lézard ; le lézard empoisonne Spock ; Spock écrabouille les ciseaux ; les ciseaux décapitent le lézard ; le lézard mange la feuille ; la feuille désavoue Spock ; Spock vaporise la pierre ; et comme toujours la pierre casse les ciseaux.

Un grand tournoi est organisé. Un joueur remporte un combat contre un autre s'il est le premier à remporter 100 manches. Un des joueurs, Léonard, a observé un de ses adversaires, Howard. Il en a déduit les informations suivantes :

— quand Howard joue Pierre, son prochain coup est choisit uniformément parmi les autres ;

— quand il joue Lézard, il joue Lézard au coup suivant ;

— quand il joue Feuille, il joue Ciseaux au coup suivant ;

— quand il joue Spock, il joue Lézard quatre fois plus souvent que Spock au coup suivant, mais ne joue jamais les autres coups ;

— enfin, quand il joue Ciseaux, il joue ensuite soit Pierre, soit Spock, soit Lézard, sachant qu'il joue 2 fois moins souvent Lézard que Spock et qu'il joue 2 fois moins Lézard que Pierre.

On peut modéliser le comportement de Howard par une chaîne de Markov.

1. Décrivez le processus stochastique $\{X_t \in S\}_{t \in T}$ de cette chaîne : quels sont les états S, le temps T et pourquoi est-ce une chaîne de Markov ?
2. Écrivez la matrice de transition et le graphe associé.
3. Quelles sont ses classes d'états communiquants ? La chaîne est-elle irréductible ?
4. Quels sont les états transitoires, permanent et/ou absorbant de la chaîne ?
5. Quelle est la probabilité que Howard rejoue Pierre trois coups après avoir joué Pierre ? Lézard trois coup après avoir joué Spock ?
6. Calculer les probabilités des (2)-transitions (pour chaque états i et j, la probabilité qu'il joue j deux coups après avoir joué i).
7. En supposant que Howard joue son premier coup uniformément, au bout de combien de tour de jeu Howard a-t-il une chance sur deux de jouer Lézard ? plus de huit chances sur 10 ?
8. Déterminez en fonction de chaque coup joué par Howard, quel coup doit jouer Léonard pour maximiser ses chances de gagner ? Pour minimiser ses chances de perdre ?
9. La chaîne est-elle régulière ? Si oui, quel est le vecteur de distribution limite ? En déduire le comportement que Léonard doit adopter pour gagner contre Howard sur le long terme.

Exercice 2 — *Publicité*

Trois produits, P_1, P_2, P_3 sont en concurrence. Une enquête a été réalisée : 30% des gens préfèrent P_1, 50% préfèrent P_2 et le reste préfèrent P_3. Une campagne de publicité est lancée pour améliorer les parts de marché de P_1. Après campagne, on regarde quels clients ont changé de préférence :

avant \ après	P_1	P_2	P_3
P_1	50%	40%	10%
P_2	30%	70%	0%
P_3	20%	0%	80%

On lit par exemple ici que 20% des consommateurs de P_2 préfèrent maintenant P_1.
On peut modéliser les effets de la campagne de publicité par une chaîne de Markov.

1. Décrivez le processus stochastique $\{X_t \in S\}_{t \in T}$ de cette chaîne : quels sont les états S, le temps T et pourquoi est-ce une chaîne de Markov ?
2. Écrivez la matrice de transition et le graphe associé.
3. Quel est l'état du marché après la campagne de publicité ?
4. On refait la même campagne, on suppose qu'elle aura les mêmes effets. Donnez, pour chaque produit P, le pourcentage de personnes préférant P_1, P_2 et P_3 parmi les personnes qui préféraient P à l'origine.
5. Que devient l'état du marché après une deuxième campagne ?
6. On suppose que la campagne est refaite indéfiniment. Existe-t-il une limite à l'état du marché ? Si oui, laquelle ?

Exercice 3 — *Politique de travaux*

Une entrerprise de travaux publics dispose d'une équipe dont tous les membres doivent travailler sur le même chantier. Elle peut effectuer 2 types de chantiers : chantiers moyens (1 semaine, type A), et chantiers longs (2 semaines, type B). On a remarqué que statistiquement, le lundi, il y a 1 chance sur 2 d'avoir une demande de chantier A et 3 chances sur 5 d'avoir une demande de chantier B. Ces demandes sont indépendantes, si bien qu'il est possible d'avoir une demande de type A et une de type B la même semaine. Dans ce cas, l'équipe choisit le chantier long. Il n'est pas possible pour l'équipe de travailler sur 2 chantiers en même temps. Si elle travaille sur un chantier long et reçoit une demande, la demande est ignorée.

Un travail de type A procure un bénéfice de 500 euros, et un travail de type B procure un bénéfice de 1200 euros. En cas d'inactivité, l'entreprise subit une perte de 250 euros.

On peut modéliser l'activité d'une semaine à l'autre par une chaîne de Markov.

1. Décrivez le processus stochastique $\{X_t \in S\}_{t \in T}$ de cette chaîne : quels sont les états S, le temps T et pourquoi est-ce une chaîne de Markov ?
2. Écrivez la matrice de transition et le graphe associé.
3. Quelles sont ses classes d'états communiquants ? La chaîne est-elle irréductible ?
4. Quels sont les états transitoires, permanent et/ou absorbant de la chaîne ?
5. On suppose que l'entreprise travaille indéfiniment. Existe-t-il une distribution limite des états ? Si oui, quelle est l'espérance de gain chaque semaine ?
6. L'entreprise aurait-elle intérêt à donner priorité au type A plutôt qu'au type B en cas de demande simultanée ?

Exercice 4 — *Consommation énergétique*

Dans une maison, le comportement d'une famille avec sa télé est la suivante : lorsque la famille regarde la télé, au bout d'une heure, dans 50% des cas, elle continue une heure de plus, dans 33% des cas, elle la met en veille et le reste du temps elle l'éteint. Lorsque la télé est en veille, au bout de 2h, la télé s'éteind. Chaque heure, il y a une chance sur 10 pour qu'une personne allume la télé, en veille ou non. La télévision consomme environ 28Wh par heure allumée et 2.5Wh par heure en veille. Quelle est la consommation annuelle moyenne en Wh de la télé de cette famille ?

Exercice 5 — *Foire*

Une foire est organisée ; l'espace dédié est découpé en 5 zones :

— l'entrée E où les gens arrivent, paient et repartent
— le vestiaire V où les gens déposent et récupèrent leur manteau
— 3 zones principales, la zone T (transports), la zone L (logistique) et la zone R (réseaux).

1. Suite à diverses études sur les années précédentes, on a déterminé que, chaque minute,
   — Chaque visiteur quitte l'entrée pour le vestiaire avec une probabilité $\frac{1}{30}$ et, sinon, reste dans l'entrée.
   — Chaque visiteur quitte le vestiaire avec une probabilité $\frac{1}{15}$, avec une chance sur trois d'aller vers la zone T, la zone L ou la zone R. Dans le cas contraire, il reste dans le vestiaire.
   — Un visiteur en zone T a une chance sur deux d'y rester, une chance sur quatre d'aller en R et une chance sur quatre d'aller en L.
   — Un visiteur en zone R a une chance sur deux d'y rester, une chance sur quatre d'aller en T et une chance sur quatre d'aller en L.
   — Un visiteur en zone L a une chance sur deux d'y rester, une chance sur quatre d'aller en T et une chance sur quatre d'aller en R.

   Modélisez les mouvements des visiteurs par une chaîne de Markov, vous représenterez cette chaîne sous forme d'un graphe.
2. Quels sont les états transitoires et quels sont les états permanents de cette chaîne ?
3. On souhaite placer entre 0 et 5 stands de nourriture dans les zones T, R et L. Chaque stand augmente de 0.1 la probabilité rester dans cette zone, et diminue donc de 0.05 la probabilité de quitter cette zone pour une des deux autres zones. On note A (respectivement B et C) le nombre de stands de nourriture que l'on place dans la zone T, (respectivement L et R). On veut étudier le comportement de la chaîne en fonction des valeurs de A, B et C. Pour simplifier les calculs, on pose $\alpha = 0.1A$; $\beta = 0.1B$ et $\gamma = 0.1C$; ainsi, par exemple, α est exactement égal à l'augmentation de la probabilité de rester en T.

   Modifiez la chaîne de la question 1 pour intégrer les valeurs de α, β et γ.
4. Montrez que, si parmi parmi α, β et γ, au moins 2 de ces valeurs sont égales à $\frac{1}{2}$, il n'y a pas de distribution limite à cette chaîne.
5. Quelle est la distribution limite si $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta, \gamma \neq \frac{1}{2}$.
6. Dans le cas où $\alpha, \beta, \gamma \neq \frac{1}{2}$, montrez que la distribution limite en fonction de α, β et γ est $(q_E^* = 0, q_V^* = 0, q_T^*, q_L^*, q_R^*)$ avec

$$
\begin{array}{lll}
q_T^* = \dfrac{1-2\beta}{1-2\alpha} q_L^* & q_L^* = \dfrac{1-2\alpha}{1-2\beta} q_T^* & q_R^* = \dfrac{1-2\alpha}{1-2\gamma} q_T^* \\
q_T^* = \dfrac{1-2\gamma}{1-2\alpha} q_R^* & q_L^* = \dfrac{1-2\gamma}{1-2\beta} q_R^* & q_R^* = \dfrac{1-2\beta}{1-2\gamma} q_L^*
\end{array}
$$

   Et en déduire que

$$
\begin{aligned}
q_T^* &= \frac{1}{1 + \frac{1-2\alpha}{1-2\beta} + \frac{1-2\alpha}{1-2\gamma}} \\
q_L^* &= \frac{1}{1 + \frac{1-2\beta}{1-2\alpha} + \frac{1-2\beta}{1-2\gamma}} \\
q_R^* &= \frac{1}{1 + \frac{1-2\gamma}{1-2\beta} + \frac{1-2\gamma}{1-2\alpha}}
\end{aligned}
$$

7. Suite à divers sponsoring, on aimerait qu'il y ait, au moment le plus fort de la journée, deux fois plus de monde dans la zone T que dans les zones L et R. Quelles valeurs de A, B et C peut-on fixer pour arriver à ce résultat ?