TD 8 : File d'attente

Recherche opérationnelle S3.

2024

Exercice 1 — ***File d'attente (6 points)***

On considère une file d'attente. Indiquez, dans chacun des cas suivant, où on décrit le taux de naissance λ_n en nombre d'arrivées par seconde et le taux de mort μ_n en nombre de départs par seconde s'il existe un régime permanent ou non. Si oui, alors indiquez la valeur de P_n pour tout $n \geq 0$. On rappelle que$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

1. $\lambda_n = 3$, $\mu_n = 5$
2. $\lambda_n = 5$, $\mu_n = 3$
3. $\lambda_n = (n+1)$, $\mu_n = 100$
4. $\lambda_n = (n+1)$, $\mu_n = n^2$

Exercice 2 — ***File de supermarché***

Dans un supermarché, une caisse de super marché traite 5 clients toutes les 10 minutes. Tant qu'il y a 2 clients ou moins dans la file, il arrive 2 clients toutes les 5 minutes. Sinon il arrive 15 clients toutes les 20 minutes. Enfin s'il y a 9 clients ou moins, une seule caisse est ouverte. Dès qu'il y en a 10 ou plus, 2 caisses de plus ouvrent.

1. Donnez la représentation graphique de cette file.
2. Donnez, en fonction de n et de $P_m(t)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, la valeur de $P'_n(t)$.
3. Montrer qu'il existe un régime permanent.
4. Donnez la valeur de P_n pour tout n en régime permanent.
5. Quel est le nombre moyen de personnes qui attendent dans la file (et donc qui ne passent pas devant une caisse) ?

Exercice 3 — ***Inversion des processus de naissance et de mort***

On considère un paradis (celui de la religion pastafariste, par exemple). Une personne qui décède arrive au paradis jusqu'à ce qu'il soit réincarné et renaisse sur Terre.

Il meurt en moyenne 2000 personnes par seconde dans le monde. Ces chiffres ne dépend pas du nombre de personnes présents au paradis.

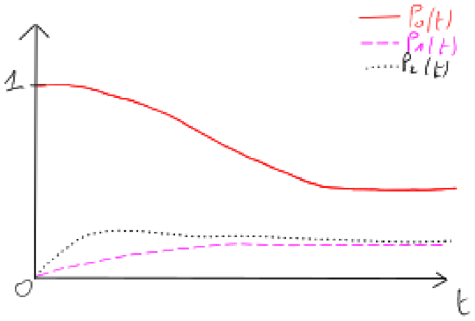
Deux pirates travaillent au service de la réincarnation : Barbe Noire et Barbe Rousse. Barbe noire réincarne en moyenne 60000 personnes par minutes et ne travaille que s'il y a 10000 personnes ou moins au paradis. Barbe rousse réincarne en moyenne 180000 personnes par minutes et ne travaille que s'il y a 5001 personnes ou plus.

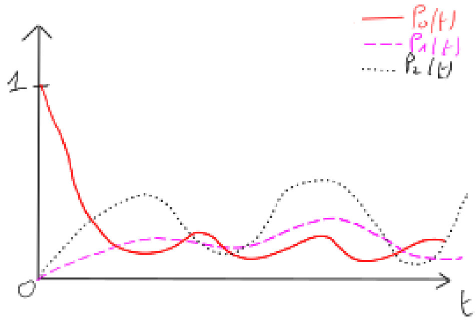
On pose $\lambda = 2000$, $\mu = 1000$, $\mu' = 3000$, $A = 5000$ et $B = 10000$.

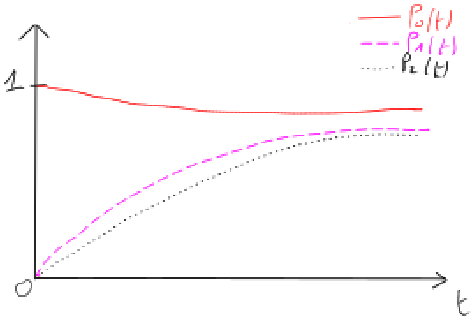
1. Décrire graphiquement, en fonction de λ, μ, μ', A et B, le processus de file d'attente associé aux décès et réincarnations dans le paradis Pastafariste.
2. Pour quelle raison peut-on supposer que, s'il existe un régime permanent, ce régime est atteint ?
3. Montrer que le régime permanent existe.
4. Soit P_n la probabilité qu'il y ait n personnes au paradis. Décrire, en fonction de λ, μ, μ', A, B, P_0 et n, la probabilité P_n. En utilisant les valeurs numériques, simplifiez ces formules pour obtenir P_n en fonction de A, n et P_0.
5. Montrer que $P_0 = 1/\left(2^{A+1} + 2^A\right)$.

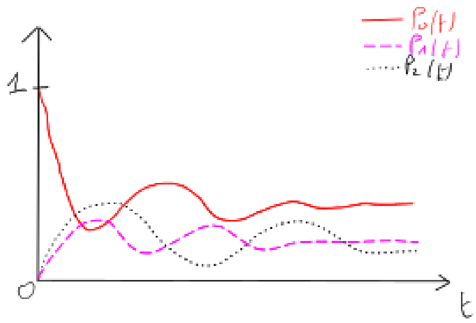
Exercice 4 — *Des files et des courbes* On considère une file d'attente avec un taux de départ μ_n et un taux d'arrivée λ_n qui dépendent du nombre de personnes dans la file. On suppose que, à partir d'un certain rang, ces taux deviennent constants égaux à μ et λ. On suppose que $\mu > \lambda$.

On a représenté ci-dessous 4 graphiques, avec trois courbes $P_0(t)$, $P_1(t)$ et $P_2(t)$ en fonction de t. Indiquez, en dessous de chaque graphique, si oui ou non, elles pourraient correspondre à la probabilité qu'il y ait respectivement 0, 1 et 2 personnes dans la file.









Exercice 5 — *File d'attente en couple*

Un coiffeur connu est très demandé mais ne prend pas de rendez vous. Ainsi il y a toujours une longue file d'attente devant. On souhaite mesurer cette file. On se rend compte qu'il y a en fait les gens vont chez ce coiffeur parce qu'il fait des bons de réductions pour les paires de personnes. Ainsi il faut considérer que les gens arrivent non pas un par un dans la file mais deux par deux. Par contre ils repartent toujours un par un. On réécrit donc les probabilités d'arrivée et de départ ainsi :

$$\begin{array}{lrr}
Pr(X(t+dt)-X(t)=2 & |X(t)=n)= & L_n dt+o(dt)\\
Pr(X(t+dt)-X(t)=-1 & |X(t)=n>0)= & \mu_n dt+o(dt)\\
Pr(X(t+dt)-X(t)=0 & |X(t)=n>0)= & (1-L_n-\mu_n)dt+o(dt)\\
Pr(X(t+dt)-X(t)=0 & |X(t)=0)= & (1-L_0)dt+o(dt)\\
Pr(X(t+dt)-X(t)\notin\{-1,0,2\} & |X(t)=n)= & 0+o(dt)
\end{array}$$

On note $P_n(t)$ la probabilité qu'il y ait n personnes dans la file à l'instant t et P_n cette probabilité en régime permanent s'il existe.

1. Représentez graphiquement cette file d'attente.
2. Montrer que $P'_n(t) = P_{n-2}(t) \cdot L_{n-2} - P_n(t) \cdot (L_n + \mu_n) + P_{n+1}(t) \cdot \mu_{n+1}$ si $n > 2$.
3. Donner les formules de $P'_0(t)$ et $P'_1(t)$.
4. On suppose que le régime permanent existe. Montrer que $P_1 = \frac{L_0}{\mu_1} P_0$ et $P_2 = (L_1 + \mu_1) \cdot \frac{L_0}{\mu_1 \mu_2} P_0$.

On pose les notations suivantes pour $n \geq 0$:

$$NS(n) = \{I \subseteq [\![1;n]\!] | \forall i < j \in I, i+1 \neq j\}$$
$$P(I,n) = \prod_{i \in I} \mu_i \prod_{\substack{i \notin I \\ i \leq n}} L_i$$

Par exemple $NS(5) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}\}$ et $P(\{1,4\},4) = \mu_1 L_2 L_3 \mu_4$.

Remarquef : $NS(0) = \emptyset$, $P(\emptyset, 0) = 1$.

5. Montrer que, pour $n \geq 1$, $\sum\limits_{\substack{I \in NS(n+1) \\ n+1 \in I}} P(I, n+1) = \mu_{n+1} \sum\limits_{\substack{I \in NS(n) \\ n \notin I}} P(I,n)$

   *Indice : **ne pas** faire cette preuve par récurrence.*
6. Montrer que, pour $n \geq 1$, $\sum\limits_{\substack{I \in NS(n+1) \\ n+1 \notin I}} P(I, n+1) = L_{n+1} \cdot \sum\limits_{I \in NS(n)} P(I,n)$

   Indice : ici non plus.
7. Montrer que, pour $n \geq 1$, $\sum\limits_{I \in NS(n+1)} P(I, n+1) = L_{n+1} \cdot \sum\limits_{I \in NS(n)} P(I,n) + \mu_{n+1} \cdot \sum\limits_{\substack{I \in NS(n) \\ n \notin I}} P(I,n)$

   Indice : toujours pas.
8. Montrer que, pour $n \geq 1$, $P_n = \sum\limits_{I \in NS(n-1)} P(I, n-1) \cdot \frac{L_0}{\prod\limits_{i=1}^{n} \mu_i} P_0$

   Indice : utiliser les trois questions précédentes et, oui, cette fois vous pouvez utiliser une preuve par récurrence
9. 60 personnes arrivent chaque heure en moyenne et 35 personnes sortent chaque demi-heure en moyenne. Quelle est la valeur de P_8 ?