TD 2 : Chemins optimaux dans les graphes

Recherche opérationnelle S3.

2022

Exercice 1 — *Table de routage d'un réseau*

Dans un réseau à commutation de paquets, on peut disposer d'une table qui indique, en chaque noeud, le canal vers lequel un paquet qui arrive doit être acheminé, connaissant la destination de ce paquet. Etant donné un réseau, on va s'intéresser à l'élaboration d'une table des routages optimaux.

Soit le réseau de 4 noeuds décrit par un graphe orienté dont la matrice d'adjacence est la suivante :

	1	**2**	**3**	**4**
1	-	3	-	3
2	2	-	2	2
3	1	-	-	1
4	-	4	4	-

1. Rappeler le nom de deux algorihtmes que l'on peut utiliser pour calculer le plus court chemin du sommet **1** vers tous les autres.
2. En fait on a besoin d'avoir les chemins optimaux entre chaque paire de sommets. Appliquer l'algorithme de Floyd-Warshall pour ce faire. Expliciter les matrices π et P à chaque étape de l'algorithme.
3. Déduire de P la table T de routage optimal dans le réseau. C'est à dire, pour tout couple (u, v) le successeur de u dans un plus court chemin de u à v.

Algorithme 1 Floyd-warshall $(G = (X, U))$

$\pi_{ij}^{(0)}$:= valeur de l'arc (i, j)
// si l'arc (i, j) n'existe pas on met $+\infty$, et si $i = j$ on met 0

$P^{(0)}(i, j) := i$ //à la fin de l'algorithme $P^{(n)}(i, j)$ contient le prédecesseur de j dans un chemin optimal de i vers j

Pour $m = 1, 2, \ldots, n$ **Faire**
  Pour $i = 1, 2, \ldots, n$ **Faire**
    Pour $j = 1, 2, \ldots, n$ **Faire**
      // Est-il plus court d'aller de i à j en passant par m ?
      Si $(\pi_{im}^{(m-1)} + \pi_{mj}^{(m-1)} < \pi_{ij}^{(m-1)})$ **Alors**
        $\pi_{ij}^{(m)} := \pi_{im}^{(m-1)} + \pi_{mj}^{(m-1)}$
        $P_{ij}^{(m)} := P_{mj}^{(m-1)}$
      Sinon
        $\pi_{ij}^{(m)} := \pi_{ij}^{(m-1)}$
        $P_{ij}^{(m)} := P_{ij}^{(m-1)}$

► **Correction**

1. Dijkstra et Bellman-Ford
2.

$$\pi^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & +\infty & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & +\infty & 0 & 1 \\ +\infty & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}, P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & +\infty & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & \boxed{4} & 0 & 1 \\ +\infty & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}, P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & \boxed{1} & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \boxed{5} & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ \boxed{6} & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}, P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boxed{2} & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ \boxed{2} & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ \boxed{5} & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}, P^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ \boxed{3} & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Il faut remonter P pour construire le chemin. Pour chaque couple (u, v), on connait le dernier nœud w du chemin de u à v, on veut le premier. Cela revient à chercher le premier nœud w' de u à w, etc. Pour arrêter la récurrence, on utilise la propriété suivante : si u est le prédecesseur de v dans un chemin de u à v alors v est le successeur de u dans ce même chemin.

Exercice 2 — *Conditions d'optimalité*

1. Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté avec un sommet s et dont les arcs (u, v) ont des valeurs $\omega(u, v) \in \mathbb{R}$. On associe chaque sommet u à un nombre d_u. Démontrer le théorème suivant : Le graphe ne possède pas de circuit absorbant si et seulement si le système $d_v - d_u \leq \omega(u, v)$ pour tout arc (u, v) de U possède une solution. Dans ce cas, poser d_u un plus court chemin de s à u est une solution du système.
2. Résoudre le système suivant en le ramenant à un problème de chemin dans un graphe :

$$\begin{aligned} x_3 - x_4 &\leq 5 \\ x_4 - x_1 &\leq -10 \\ x_1 - x_3 &\leq 8 \\ x_2 - x_1 &\leq -11 \\ x_3 - x_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

3. Même question pour le système :

$$\begin{aligned} x_3 - x_2 &\leq 5 \\ x_4 - x_3 &\leq -2 \\ x_4 - x_2 &\leq 4 \\ x_1 - x_2 &\leq 3 \\ x_5 - x_1 &\leq 2 \\ x_3 - x_5 &\leq 7 \\ x_5 - x_4 &\leq -1 \end{aligned}$$

► **Correction**

1. Supposons qu'il n'y ait pas de circuit aborsbant, alors il existe un plus court chemin de valeur d_u entre s et u pour tout $u \in X$ alors, $d_v \leq d_u + \omega(u, v)$ car un chemin empruntant un plus court chemin de s à u puis l'arc (u, v) est un chemin de s à v.
   Sinon, s'il existe un circuit aborbant $(u_1, u_2, \ldots, u_p, u_{p+1} = u_1)$, alors, si le système a une solution, on vérifie $0 = \sum_{i=1}^{p} d_{u_{i+1}} - d_{u_i} \leq \sum_{i=1}^{p} \omega(u_i, u_{i+1}) < 0$ ce qui est exclu.
2. Si la question 1 est vrai, on construit un graphe avec 4 nœuds où $\omega(v_3, v_4) = 5$, $\omega(v_4, v_1) = 10$, $\omega(v_3, v_1) = 8$, $\omega(v_1, v_2) = -11$, $\omega(v_2, v_3) = 2$. On cherche un plus court chemin de n'importe quel nœud s vers les autres, ce qui nous donne x_i.
3. Comme pour la question précédente.

Dans la question 2 ou 3 on trouve un circuit absorbant, et donc pas de solution au problème.

Exercice 3 — *Coupes disjointes et plus court chemins*

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté sur les arcs. Soient x et y deux nœuds du graphe. On appelle une coupe séparant x et y un sous-ensemble d'arcs de A tel que retirer ces arcs de G supprime tout chemin de x vers y.

1. Montrer que, après suppression d'une coupe C séparant x et y, V est coupé en deux ensembles X et $Y = V \backslash X$ tels que tout arc de G reliant X à Y appartient à C.
2. Montrer que le nombre maximum de coupes disjointes séparant x et y est égal au nombre d'arcs dans un plus court chemin de x vers y.

▶ **Correction**

1. X est l'ensemble des descendants de x dans le graphe résultant de la suppression des arcs.
2. Supposons que l'on ait un chemin P avec k arcs entre x et y. On note $P = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Soit $C = (C_1, C_2, \ldots, C_l)$ des coupes disjointes. Pour tout C_j , il existe un arc a_i de P dans C_j (sinon la coupe ne sépare pas x de y). Puisque deux coupes C_i et C_j sont disjointes, il ne peut y avoir plus de k coupes dans C : $l \leq k$. Donc le nombre maximum de coupes disjointes dans le graphe est plus petit que la taille d'un plus court chemin.

   Montrons qu'il existe un ensemble de k coupes disjointes. Contruisons récursivement l'ensemble suivant :
   — $V_0 = x$
   — $V_{i+1} = \Gamma^+(\bigcup_{j=0}^{i} V_j)$

   Soit l le premier (et unique) entier tel que $y \in V_l$. Pour $i < l$, posons C_i l'ensembles des arcs allant d'un nœud de $\bigcup_{j=0}^{i} V_j$ à un nœud de V_{i+1} . Par construction, chaque couple (C_i, C_j) est disjoint si $i \neq j$. Chaque ensemble C_i est une coupe séparant x de y car
   — $\bigcup_{j=0}^{i} V_j$ contient x mais pas y (car $i < l$)
   — soit un chemin Q reliant x à y dans G, et soit u le dernier nœud de $\bigcup_{j=0}^{i} V_j$ dans Q.

     Ce nœud ne peut être y car y n'est pas dans $\bigcup_{j=0}^{i} V_j$. Soit v le nœud qui suit u dans Q.

     Nécessairement (u, v) est un arc de G et v n'est pas dans $\bigcup_{j=0}^{i} V_j$. Par définition de V_{i+1}, $v \in V_{i+1}$ et $(u, v) \in C_i$. Donc C_i coupe le chemin Q.

   Montrons enfin que l est égal à la taille de P^*, un plus court chemin entre x et y. On note $\{u_0 = s, u_1, \ldots, u_{k-1}, u_k = t\}$ les nœuds de P^*.
   Propriété 1. Pour tout nœud v de V_{i+1} , il existe un nœud u de V_i tel que $(u, v) \in A$.
   La propriété 1 permet de montrer par récurrence que si un nœud v est dans V_i alors il existe un chemin de taille i entre x et v.
   Montrons par récurrence que $u_i \in V_i$.
   — $u_0 = s \in V_0$ par définition
   — Soit $i \leq l, k$, Si, pour tout $j \leq i, u_j \in V_j$. Le nœud $u_{i+1} \notin \bigcup_{j=0}^{i} V_j$ car alors il existerait un chemin de x à u_{i+1} de taille inférieure à $i + 1$ et donc un chemin de x à y de taille inférieur à k. Donc $u_{i+1} \in V_{i+1}$.

   Donc $u_k \in V_l$, donc $k = l$. Donc il existe un ensemble de k coupes disjointes.

Exercice 4 — *Conversion de monnaie*

Soit G un graphe dont les nœuds représentent une monnaie et chaque arc (u, v) , s'il existe, représente une conversion possible d'une monnaie u vers une monnaie v. Dans ce cas l'arc est valué avec le taux de la conversion.

Sous quelle condition peut-on devenir infiniment riche ? Transformer ce graphe en un graphe H de sorte que chercher un plus court chemin dans H permette de savoir s'il est possible de devenir infiniment riche. L'algorithme de Dijkstra peut-il nous aider ?

▶ **Correction**

On met un nœud par monnaie, et comme poids $-\log(c(u, v))$ où $c(u, v)$ est la conversion de u vers v. On obtient donc un problème de plus court chemin (plutôt qu'un problème de recherche d'un chemin dont le produit des poids est maximum). Il y a un circuit absorbant ssi on peut devenir infiniment riche.