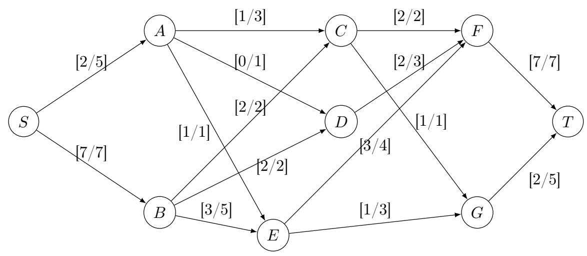
TD 4 : Problème de flot maximum et de coupe minimum

Recherche opérationnelle S3.

2024

Exercice 1 — *Algorithme de Ford-Fulkerson*

1. Déterminer un flot de valeur maximale dans le graphe suivant avec l'algorithme de Ford Fulkerson. Un flot initial vous est donné. Utilisez l'algorithme de marquage. Refaites ensuite une des itérations avec la méthode du réseau résiduel.
2. Donner la coupe minimale associée.
3. Si on souhaite augmenter le flot maximum de ce graphe de 1, de quels arcs doit-on augmenter la capacité ? Donner un contre-exemple de graphe où ce n'est pas suffisant. Décrire un algorithme, qui change une ou plusieurs capacités de sorte que le flot max augmente de exactement 1.



▶ Correction

En faisant la question 1, on trouve un flot de 11, avec par exemple comme coupe min (SA-BEDCF ; GT), soit les arcs (FT, CG,EG) de capacités 7+1+3 = 11.

Une chaîne augmentante qu'on peut trouver est $SACBEGT$ avec le marquage suivant : A marqué avec $+S$, C marqué avec $+A$, D marqué avec $+A$, B marqué avec $-C$, E marqué avec $+B$; F marqué avec $+D$, G marqué avec $+E$ et T marqué avec $+G$.. Cette chaîne augmente le flot de 2.

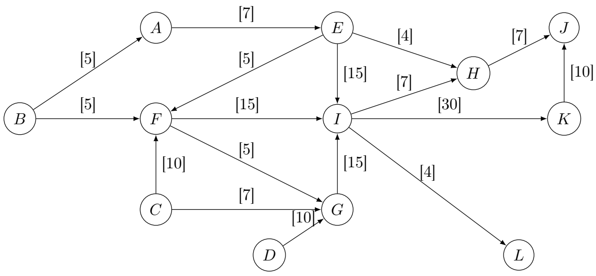
Une autre chaîne augmentante qu'on peut trouver est $SADFEGT$ avec le marquage suivant : A marqué avec $+S$, C marqué avec $+A$, D marqué avec $+A$, B marqué avec $-C$, F marqué avec $+D$, E marqué avec $-F$; G marqué avec $+E$ et T marqué avec $+G$. Cette chaîne augmente le flot de 1.

Pour la question 3, la réponse attendue est "Les arcs de la coupe min" et ça fonctionne ici. Cependant, dans un graphe où il existe plusieurs coupe min, ça ne suffit pas. Un exemple simple est S -[1]-> A -[1]-> T.

où il existe 2 coupes min (S, AT) et (SA, T) de capacité 1. La bonne réponse est donc, "augmenter la capacité des arcs de toutes les coupes min". Un algo pour augmenter le flot max de 1 est le suivant : - calculer un flot max de valeur v - tant que le flot max est de valeur v ; trouver une coupe min, choisir un arc de cette coupe min et augmenter sa capacité de 1.

Exercice 2 — *Adduction d'eau*

Trois villes J, K et L sont alimentées en eau grâce à 4 réserves A, B, C et D (nappes souterraines, châteaux d'eau, usines de traitement ...). Les réserves journalières disponibles sont de 15 milliers de m^3 pour A, de 10 pour B, de 15 pour C et de 15 pour D. Le réseau de distribution d'eau est schématisé par le graphe ci-dessous, les débits maximaux sont indiqués sur chaque arc en milliers de m^3 par jour :



1. Déterminer combien de m^3 d'eau peut arriver aux villes en le transformant en problème de flot maximum et donner la coupe minimale correspondante. Utilisez l'algorithme de Ford Fulkerson avec l'algorithme de marquage. Refaites ensuite une des itérations avec la méthode du réseau résiduel.
2. La valeur de ce flot est jugée nettement insuffisante. Ces trois villes en pleine évolution désirent améliorer leur réseau d'alimentation afin de satisfaire des besoins futurs plus importants. Une étude a été faite et a permis de déterminer les demandes journalières maximales probables, à savoir pour la ville J : 15 milliers de m^3, pour la ville K : 20, et pour la ville L : 15. Aussi le conseil communal décide de refaire les canalisations (A,E) et (I,L).

   Déterminer les capacités à prévoir pour ces deux canalisations et la valeur du nouveau flot optimal.

▶ Correction

1. On rajoute une source s et des arcs la reliant à A, B, C et D de capacité 15, 10, 15, 15. On rajoute un puits t et des arcs reliant J, K et L à t de capacité infinie.

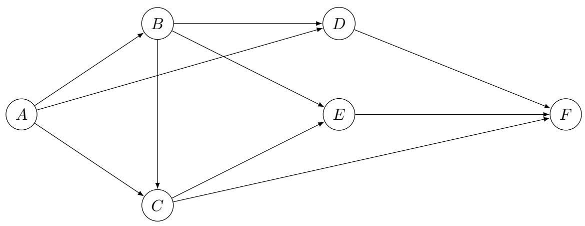
   On trouve par exemple comme chemin augmentant

   — $sAEIHJt$: valeur + 7
   — $sBFIKt$: valeur + 5
   — $sCGIKt$: valeur + 7
   — $sDGIKt$: valeur + 8
   — $sCFILt$: valeur + 4
   — $sCFIKt$: valeur + 4
   — $sDGCFIKt$: valeur + 2

   Valeur 37.
2. Pour déterminer ces nouvelles capacités, on peut faire comme dans l'exo 1, chercher une coupe min, augmenter (A, E) ou (I, L) si ces canalisations font partie de la coupe. Si aucun de ces arcs n'est pas dans une coupe, alors on ne peut atteindre l'objectif.

Exercice 3 — *Recherche de chemins disjoints dans un graphe*

Soit le graphe G suivant :



Quel est dans ce graphe le nombre maximal de chemins de A à F que l'on peut trouver, disjoints au sens des sommets ? (Trois chemins sont nœuds disjoints s'ils n'ont aucun nœud en commun.) Pour répondre à cette question, on associera à G un nouveau graphe G' dans lequel on cherchera un flot maximal.

▶ **Correction**

Pour trouver des chemins arcs-disjoints entre A et F, on met une capacité de 1 partout et on cherche un flot max. Pour chercher des chemins nœuds disjoints, on dédouble chaque nœud v en v^- et v^+, les arcs entrant vont dans v^-, et les sortants sortent de v^+. Enfin, on rajoute un arc de v^- à v^+ de capacité 1. On cherche un flot max de A^+ vers F^-.

Exercice 4 — *Couplage maximum*

On rappelle qu'un graphe biparti est un graphe où les nœuds sont partitionnés en deux stables (nœuds sans arêtes). Un couplage est un ensemble d'arêtes qui ne se touchent pas. Montrer que le problème du couplage maximal dans un graphe biparti peut être vu comme un problème de flot maximal dans un réseau de transport à préciser. On expliquera comment le flot permet de retrouver le couplage.

▶ **Correction**

Soit un graphe biparti $G = (V \cup W, A)$, on rajoute une source s et un puits t, on relie s à V, et W à t. Tous les arcs sont de capacité 1. Ainsi le flot entrant en chaque nœud de V est 1. Le flot sortant de chaque nœud de W est 1. Par contrainte de conservation, il ne peut y avoir plus d'un arc sortant d'un nœud de V et entrant en un nœud de W. Donc les arcs entre V et W contenant du flot forment un couplage dont la taille est égale à la valeur du flot. Inversement si on a un couplage M, alors on peut mettre un flot de 1 sur tous ces arcs et sur les arcs (s, v) tel que $(v, w) \in M$ et sur tous les arcs (w, t) tels que $(v, w) \in M$. On obtient alors un flot valide dont la valeur est égal à $|M|$. Donc trouver un flot max dans ce graphe est bien équivalent à trouver un couplage maximum.

Exercice 5 — *Repas de mariage*

On doit organiser un repas de mariage. Pour augmenter l'interaction sociale, les mariés voudraient que deux membres d'un même groupe d'amis/famille ne soient pas placés dans la même table. Formuler ce problème comme le calcul d'un flot maximal dans un réseau de transport à préciser.

On considère qu'il y a p groupes/familles. Le $i$ème groupe comprend $a(i)$ membres. Il y a q tables. La capacité de la $j$ème table est $b(j)$.

▶ **Correction**

Cet exercice ressemble au précédent, où on cherche un couplage pondéré (chaque arête du couplage pondéré peut toucher un certain nombre d'autres arêtes.). On crée un graphe $G = (V \cup W, A)$ où chaque sommet de V est un groupe et chaque sommet de W est une table. On ajoute une source s et un puits t. On relie s à V et W à t. Les premiers arcs sont de capacité $a(i)$ et les autres de capacité $b(j)$. On relie tout nœud de V à tout nœud de W avec un arc de capacité 1.

Exercice 6 — *Choix d'expériences scientifiques*

On souhaite choisir des expériences scientifiques parmi n expériences $E_1, ..., E_n$ qui doivent être réalisées dans l'espace. Les expériences nécessitent des instruments parmi p instruments disponibles $I_1, ..., I_p$. Un instrument emporté peut servir à plusieurs expériences. La réalisation de l'expérience E_i rapporte p_i euros mais le transport de l'instrument I_j coûte c_j euros. L'objectif est de maximiser le bénéfice.

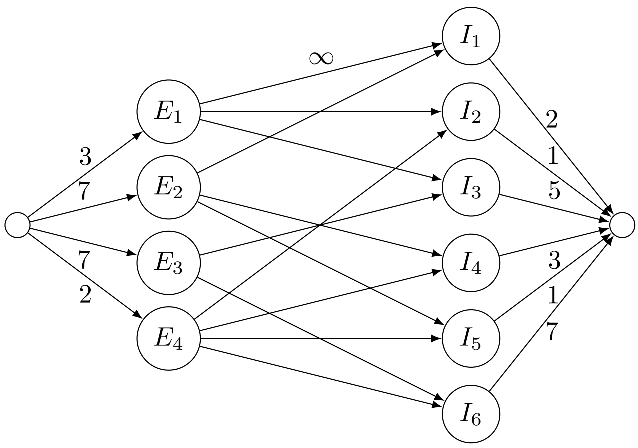
Pour résoudre ce problème, on le modélise par la recherche d'une coupe de capacité minimale dans le réseau de transport suivant : Les sommets sont $E_1, ..., E_n$ et $I_1, ..., I_p$, une source s et un puits t. Un arc de capacité p_i va de s à E_i et un arc de capacité c_j va de I_j à t. Si E_i utilise I_j alors un arc de capacité infinie va de E_i à I_j.

1. Dessiner le réseau associé aux expériences suivantes et en trouver une coupe de capacité minimum.

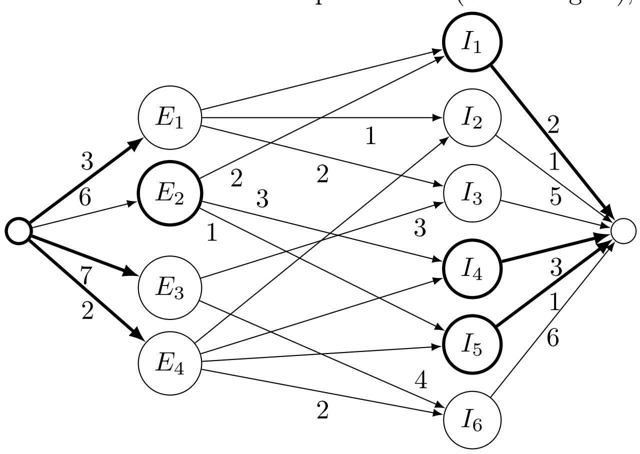
	p_i	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
c_j		2	1	5	3	1	7
E_1	3	x	x	x			
E_2	7	x			x	x	
E_3	7			x			x
E_4	2		x		x	x	x

2. Montrer qu'on peut associer une solution admissible du problème à toute coupe de capacité finie. Quelle relation existe entre la capacité d'une coupe et le bénéfice de la solution associée ?
3. En déduire une façon de résoudre l'exemple de la question 1

► Correction



1. On obtient le flot et la coupe suivante (S est en gras), de capacité 18.



2. Considérons une coupe (S, T) de capacité finie. Ainsi, dans cette coupe, si $E_i \in S$ alors, pour tout instrument I_j utilisé par E_i ; $I_j \in S$ (sinon la capacité de la coupe est infinie). De même, par contraposée, si $I_j \in T$ alors pour toute expérience E_i utilisant I_j, on a $E_i \in T$.
Supposons qu'on effectue toutes les expériences telles que $E_i \in S$ et on amène tout instrument tel que $I_j \in S$. Alors le gain B est

$$B = \sum_{E_i \in S} (p_i) - \sum_{I_j \in S} (c_j)$$
$$C(S,T) = \sum_{E_i \in T} (p_i) + \sum_{I_j \in S} (c_j)$$
$$B = \sum_{E_i} (p_i) - C(S,T)$$

3. Il faut donc effectuer l'expérience E_2 avec les instruments I_1, I_4 et I_5, pour un gain de 1.