TD 8 : File d'attente

Recherche opérationnelle S3.

2024

Exercice 1 — *File d'attente (6 points)*

On considère une file d'attente. Indiquez, dans chacun des cas suivant, où on décrit le taux de naissance λ_n en nombre d'arrivées par seconde et le taux de mort μ_n en nombre de départs par seconde s'il existe un régime permanent ou non. Si oui, alors indiquez la valeur de P_n pour tout $n \geq 0$. On rappelle que$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

1. $\lambda_n = 3$, $\mu_n = 5$

▶ **Correction**

Si λ_n et μ_n sont constants avec $\lambda_n < \mu_n$, alors il y a régime permanent. On a alors les formules du cours : $P_0 = 1 - \frac{3}{5}$ et $P_n = (1 - \frac{3}{5}) \cdot (\frac{3}{5})^n$.

2. $\lambda_n = 5$, $\mu_n = 3$

▶ **Correction**

Si λ_n et μ_n sont constants avec $\lambda_n > \mu_n$, alors il n'y a pas de régime permanent.

3. $\lambda_n = (n+1)$, $\mu_n = 100$

▶ **Correction**

Il y a régime permanent si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdots \mu_n}$ converge. Or ici $\frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdots \mu_n} \simeq_{n \to +\infty} \frac{n!}{100^n}$. Cette suite ne peut pas converger vers 0 donc la série ne converge pas. Donc il n'y a pas de régime permanent.

4. $\lambda_n = (n+1)$, $\mu_n = n^2$

▶ **Correction**

Il y a régime permanent si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdots \mu_n}$ converge. Or ici $\frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdots \mu_n} = \frac{n!}{n!^2} = \frac{1}{n!}$. Cette série converge vers $exp(1) - 1$.

On a donc $P_0(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdots \mu_n}) = 1$

$P_0 = 1/e$

$P_n = \frac{1}{n!} 1/e$.

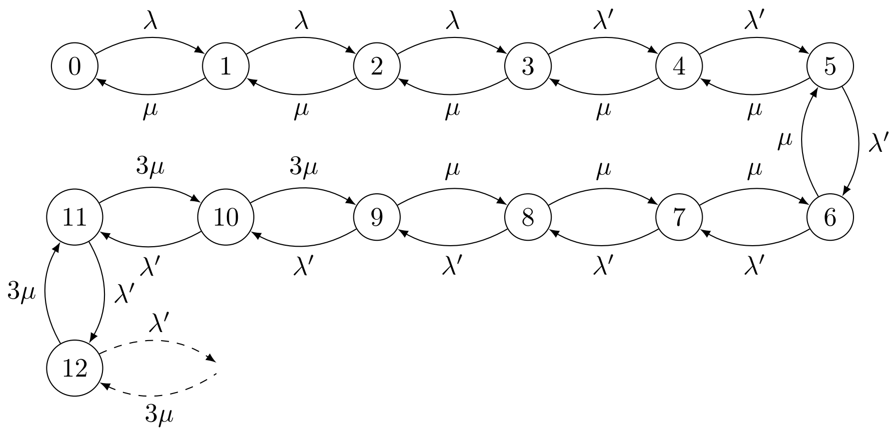
Exercice 2 — *File de supermarché*

Dans un supermarché, une caisse de super marché traite 5 clients toutes les 10 minutes. Tant qu'il y a 2 clients ou moins dans la file, il arrive 2 clients toutes les 5 minutes. Sinon il arrive 15 clients toutes les 20 minutes. Enfin s'il y a 9 clients ou moins, une seule caisse est ouverte. Dès qu'il y en a 10 ou plus, 2 caisses de plus ouvrent.

1. Donnez la représentation graphique de cette file.

▶ **Correction**

On normalise les nb de clients par unité de temps : ici on prend comme unité de temps les tranches de 10 minutes.
On pose $\mu = 5$, $\lambda = 4$ et $\lambda' = 7.5$.



2. Donnez, en fonction de n et de $P_m(t)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, la valeur de $P'_n(t)$.

▶ **Correction**

$$\begin{aligned} P_0(t+dt) &= P_0(t)\cdot(1-\lambda dt) + P_1(t)\cdot \mu dt + o(dt) \\ \Rightarrow P'_0(t) &= -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \end{aligned}$$

Pour $i \in [\![1;2]\!]$,

$$\begin{aligned} P_i(t+dt) &= P_{i-1}(t)\cdot \lambda dt + P_i(t)\cdot(1-(\lambda+\mu)dt) + P_{i+1}(t)\cdot \mu dt + o(dt) \\ \Rightarrow P'_i(t) &= \lambda P_{i-1}(t) - (\lambda+\mu)P_i(t) + \mu P_{i+1}(t) \end{aligned}$$

Pour $i = 3$,

$$\begin{aligned} P_i(t+dt) &= P_{i-1}(t)\cdot \lambda dt + P_i(t)\cdot(1-(\lambda'+\mu)dt) + P_{i+1}(t)\cdot \mu dt + o(dt) \\ \Rightarrow P'_i(t) &= \lambda P_{i-1}(t) - (\lambda'+\mu)P_i(t) + \mu P_{i+1}(t) \end{aligned}$$

Pour $i \in [\![4;8]\!]$,

$$\begin{aligned} P_i(t+dt) &= P_{i-1}(t)\cdot \lambda' dt + P_i(t)\cdot(1-(\lambda'+\mu)dt) + P_{i+1}(t)\cdot \mu dt + o(dt) \\ \Rightarrow P'_i(t) &= \lambda' P_{i-1}(t) - (\lambda'+\mu)P_i(t) + \mu P_{i+1}(t) \end{aligned}$$

Pour $i = 9$,

$$\begin{aligned} P_i(t+dt) &= P_{i-1}(t)\cdot \lambda' dt + P_i(t)\cdot(1-(\lambda'-\mu)dt) + P_{i+1}(t)\cdot 3\mu dt + o(dt) \\ \Rightarrow P'_i(t) &= \lambda' P_{i-1}(t) - (\lambda'+\mu)P_i(t) + 3\mu P_{i+1}(t) \end{aligned}$$

Pour $i \geq 10$,

$$\begin{aligned} P_i(t+dt) &= P_{i-1}(t)\cdot \lambda' dt + P_i(t)\cdot(1-\lambda'-3\mu)dt + P_{i+1}(t)\cdot 3\mu dt + o(dt) \\ \Rightarrow P'_i(t) &= \lambda' P_{i-1}(t) - (\lambda'+3\mu)P_i(t) + 3\mu P_{i+1}(t) \end{aligned}$$

3. Montrer qu'il existe un régime permanent.

▶ **Correction**

Il existe un régime permanent car, à partir d'un certain rang le taux de naissance est strictement inférieur au taux de mort.

4. Donnez la valeur de P_n pour tout n en régime permanent.

▶ **Correction**

On commence par trouver P_i en fonction de P_0 avec la formule :

$$P_i = \frac{\lambda_0 \lambda \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} P_0$$

$$\begin{aligned}
&\text{Pour } i \in [\![1;3]\!], && P_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i P_0 \\
&\text{Pour } i \in [\![4;9]\!], && P_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \left(\frac{\lambda'}{\mu}\right)^{i-3} P_0 \\
&\text{Pour } i \geq 10 && P_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \left(\frac{\lambda'}{\mu}\right)^6 \left(\frac{\lambda'}{3\mu}\right)^{i-9} P_0
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{+\infty} P_i &= 1 \\
P_0 + P_0 \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i &+ \\
P_0 \sum_{i=4}^{9} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \left(\frac{\lambda'}{\mu}\right)^{i-3} &+ \\
P_0 \sum_{i=10}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \left(\frac{\lambda'}{\mu}\right)^6 \left(\frac{\lambda'}{3\mu}\right)^{i-9} &= 1
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
P_0(1 + 1.95 + 15.96 + 5.83) &= 1 \\
P_0 &= 0.040 \\
P_1 &= 0.032 \\
P_2 &= 0.025 \\
P_3 &= 0.020 \\
P_4 &= 0.031 \\
P_5 &= 0.047 \\
P_6 &= 0.070 \\
P_7 &= 0.105 \\
P_8 &= 0.157 \\
P_9 &= 0.236 \\
P_{10} &= 0.11 \\
P_{11} &= 0.059 \\
P_{12} &= 0.029 \\
&\cdots
\end{aligned}$$

On obtient le graphique suivant, cohérent avec l'idée qu'on peut se faire des équilibres : étant donné qu'avec 2 personnes ou moins, il y a plus de personnes qui partent que de personnes qui n'arrivent, on a tendance à avoir 0 personnes ; sinon, étant donné qu'avant 9 personnes, il y a plus de personnes qui arrivent et après, il y a plus de personnes qui partent, 9 est aussi un équilibre.

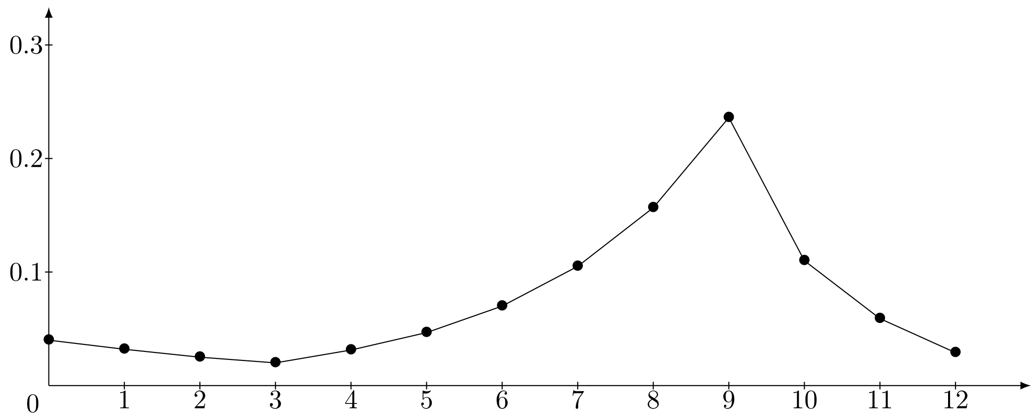


FIGURE 1 –

5. Quel est le nombre moyen de personnes qui attendent dans la file (et donc qui ne passent pas devant une caisse) ?

▶ **Correction**

On calcule

$$\sum_{i=1}^{9}(i-1)\cdot P_i + \sum_{i=10}^{+\infty}(i-3)\cdot P_i$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{9}(i-1)\cdot P_i &= P_0\cdot\left(\sum_{i=1}^{3}(i-1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\right) + P_0\cdot\left(\sum_{i=4}^{9}(i-1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\left(\frac{\lambda'}{\mu}\right)^{i-3}\right)\\ &= P_0\cdot(1.66+104.98) = 4.31\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=10}^{+\infty}(i-3)\cdot P_i &= \sum_{i=10}^{+\infty}(i-3)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\left(\frac{\lambda'}{\mu}\right)^6\left(\frac{\lambda'}{3\mu}\right)^{i-9}P_0\\ &= \sum_{i=7}^{+\infty} i\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\left(\frac{\lambda'}{\mu}\right)^6\left(\frac{\lambda'}{3\mu}\right)^{i-6}P_0\\ &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\left(\frac{\lambda'}{\mu}\right)^6\left(\frac{\lambda'}{3\mu}\right)^{-5}\cdot\left(\sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{\lambda'}{3\mu}\right)^{i-1}P_0 - \sum_{i=1}^{6} i\left(\frac{\lambda'}{3\mu}\right)^{i-1}P_0\right)\\ &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\left(\frac{\lambda'}{\mu}\right)^6\left(\frac{\lambda'}{3\mu}\right)^{-5}\cdot\left(\frac{1}{(1-\lambda'/(3\mu))^2} - \sum_{i=1}^{6} i\left(\frac{\lambda'}{3\mu}\right)^{i-1}P_0\right)\\ &= 186.62\cdot(0.16-0.15) = 1.866\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{9}(i-1)\cdot P_i + \sum_{i=10}^{+\infty}(i-3)\cdot P_i = 6.176$$

Exercice 3 — *Inversion des processus de naissance et de mort*

On considère un paradis (celui de la religion pastafariste, par exemple). Une personne qui décède arrive au paradis jusqu'à ce qu'il soit réincarné et renaisse sur Terre.

Il meurt en moyenne 2000 personnes par seconde dans le monde. Ces chiffres ne dépend pas du nombre de personnes présents au paradis.

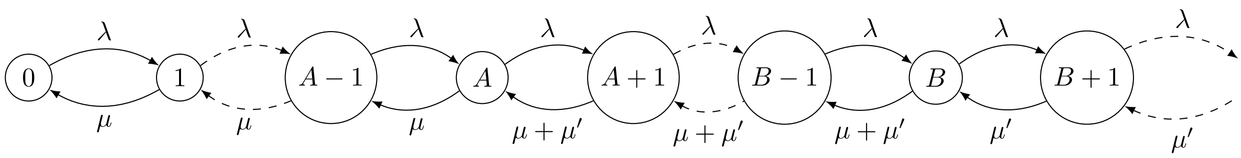
Deux pirates travaillent au service de la réincarnation : Barbe Noire et Barbe Rousse. Barbe noire réincarne en moyenne 60000 personnes par minutes et ne travaille que s'il y a 10000 personnes ou moins au paradis. Barbe rousse réincarne en moyenne 180000 personnes par minutes et ne travaille que s'il y a 5001 personnes ou plus.

On pose $\lambda = 2000$, $\mu = 1000$, $\mu' = 3000$, $A = 5000$ et $B = 10000$.

1. Décrire graphiquement, en fonction de λ, μ, μ', A et B, le processus de file d'attente associé aux décès et réincarnations dans le paradis Pastafariste.

▶ Correction

Attention au fait ici que les taux de *naissance* et de *mort* sont respectivement les taux de *morts atteignant le paradis* et de *réincarnation*. En mettant chaque taux à la même unité, ici en nombre de personnes par seconde, on obtient pour le taux de réincarnation μ, $\mu + \mu'$ et μ' quand il y a respectivement A, entre $A+1$ et B, et au moins $B+1$ personnes dans la file.



2. Pour quelle raison peut-on supposer que, s'il existe un régime permanent, ce régime est atteint ?

▶ Correction

On peut raisonnablement supposer que des gens naissent et meurt depuis très longtemps et donc que la file a atteint son régime permanent.

3. Montrer que le régime permanent existe.

▶ Correction

A partir d'un certain rang, le taux de naissance et et le taux de mort de la file sont constants égaux à λ et μ'. Puisque $\lambda < \mu'$, alors, par théorème du cours, le régime permanent existe.

4. Soit P_n la probabilité qu'il y ait n personnes au paradis. Décrire, en fonction de λ, μ, μ', A, B, P_0 et n, la probabilité P_n. En utilisant les valeurs numériques, simplifiez ces formules pour obtenir P_n en fonction de A, n et P_0.

▶ Correction

Pour tout $1 \leq n \leq A, P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = 2^n P_0$.

Pour tout $A+1 \leq n \leq B = 2A, P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^A \left(\frac{\lambda}{\mu+\mu'}\right)^{n-A} P_0 = 2^A \left(\frac{1}{2}\right)^{n-A} P_0 = 2^{2A} \frac{1}{2^n} P_0$.

Pour tout $B+1 = 2A+1 \leq n, P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^A \left(\frac{\lambda}{\mu+\mu'}\right)^{B-A} \left(\frac{\lambda}{\mu'}\right)^{n-B} P_0 = 2^A \left(\frac{1}{2}\right)^A \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2A} P_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2A} \left(\frac{2}{3}\right)^n P_0$.

5. Montrer que $P_0 = 1/\left(2^{A+1} + 2^A\right)$.

▶ Correction

Donc

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{A} 2^n + \sum_{n=A+1}^{2A} 2^{2A} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=2A+1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2A} \left(\frac{2}{3}\right)^n} \tag{1}$$

$$P_0 = \frac{1}{2^{A+1} - 1 + \sum_{n=A+1}^{2A} 2^{2A} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=2A+1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2A} \left(\frac{2}{3}\right)^n} \tag{2}$$

$$P_0 = \frac{1}{2^{A+1} - 1 + 2^{2A}(\frac{1}{2^A} - \frac{1}{2^{2A}}) + \sum_{n=2A+1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2A} \left(\frac{2}{3}\right)^n} \tag{3}$$

$$P_0 = \frac{1}{2^{A+1} - 1 + (2^A - 1) + \sum_{n=2A+1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2A} \left(\frac{2}{3}\right)^n} \tag{4}$$

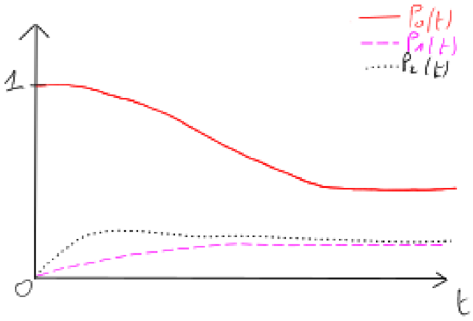
$$P_0 = \frac{1}{2^{A+1} - 1 + (2^A - 1) + \left(\frac{3}{2}\right)^{2A} 3(\frac{2}{3})^{2A+1}} \tag{5}$$

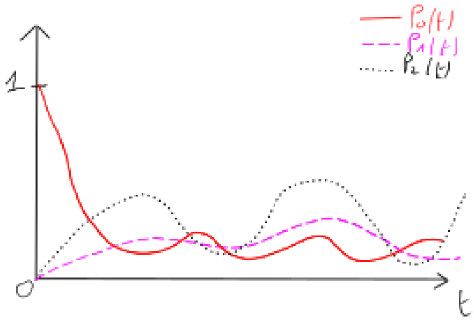
$$P_0 = \frac{1}{2^{A+1} - 1 + (2^A - 1) + 2} \tag{6}$$

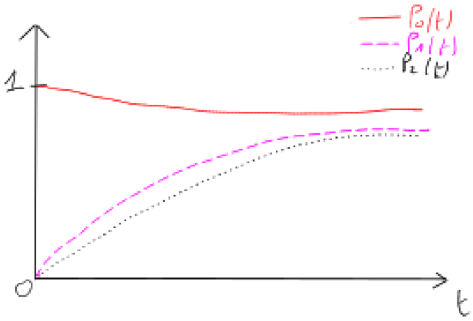
$$P_0 = \frac{1}{2^{A+1} + 2^A} \tag{7}$$

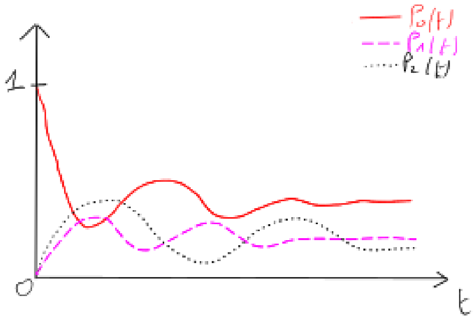
Exercice 4 — *Des files et des courbes* On considère une file d'attente avec un taux de départ μ_n et un taux d'arrivée λ_n qui dépendent du nombre de personnes dans la file. On suppose que, à partir d'un certain rang, ces taux deviennent constants égaux à μ et λ. On suppose que $\mu > \lambda$.

On a représenté ci-dessous 4 graphiques, avec trois courbes $P_0(t)$, $P_1(t)$ et $P_2(t)$ en fonction de t. Indiquez, en dessous de chaque graphique, si oui ou non, elles pourraient correspondre à la probabilité qu'il y ait respectivement 0, 1 et 2 personnes dans la file.









▶ **Correction**

On sait qu'il y a un régime permanent car $\mu > \lambda$ donc les courbes doivent se stabiliser à partir d'un certain moment. Cela élimine les courbes en haut à droite. Les courbes en bas à gauche est impossible car la somme des probas est supérieure à 1. Pour les deux autres, il n'y a à priori pas de problème évident.

Exercice 5 — *File d'attente en couple*

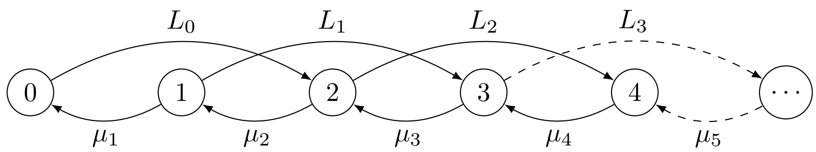
Un coiffeur connu est très demandé mais ne prend pas de rendez vous. Ainsi il y a toujours une longue file d'attente devant. On souhaite mesurer cette file. On se rend compte qu'il y a en fait les gens vont chez ce coiffeur parce qu'il fait des bons de réductions pour les paires de personnes. Ainsi il faut considérer que les gens arrivent non pas un par un dans la file mais deux par deux. Par contre ils repartent toujours un par un. On réécrit donc les probabilités d'arrivée et de départ ainsi :

$$
\begin{aligned}
&Pr(X(t+dt)-X(t)=2 && |X(t)=n) = && L_n dt + o(dt)\\
&Pr(X(t+dt)-X(t)=-1 && |X(t)=n>0) = && \mu_n dt + o(dt)\\
&Pr(X(t+dt)-X(t)=0 && |X(t)=n>0) = && (1-L_n-\mu_n)dt + o(dt)\\
&Pr(X(t+dt)-X(t)=0 && |X(t)=0) = && (1-L_0)dt + o(dt)\\
&Pr(X(t+dt)-X(t)\notin\{-1,0,2\} && |X(t)=n) = && 0 + o(dt)
\end{aligned}
$$

On note $P_n(t)$ la probabilité qu'il y ait n personnes dans la file à l'instant t et P_n cette probabilité en régime permanent s'il existe.

1. Représentez graphiquement cette file d'attente.

▶ **Correction**



2. Montrer que $P_n'(t) = P_{n-2}(t)\cdot L_{n-2} - P_n(t)\cdot(L_n+\mu_n) + P_{n+1}(t)\cdot\mu_{n+1}$ si $n>2$.

▶ **Correction**

Calculons $P_n(t+dt)$. A l'instant $t+dt$, il peut y avoir n personnes dans plusieurs cas :

— il y avait n personnes à l'instant t, et, avec une probabilité $(1-L_n-\mu_n)dt+o(dt)$, personne n'est parti ou arrivé

— il y avait $n-2$ personnes à l'instant t, et, avec une probabilité $L_{n-2}dt+o(dt)$, deux personnes sont arrivées

— il y avait $n+1$ personnes à l'instant t, et, avec une probabilité $\mu_{n+1}dt+o(dt)$, une personne est partie

— il y avait un autre nombre de personnes et, avec une probabilité $o(dt)$, ce nombre est passé à n.

$$
\begin{aligned}
P_n(t+dt) &= P_{n-2}(t)\cdot(L_{n-2}dt+o(dt)) + P_n(t)\cdot((1-L_n-\mu_n)dt+o(dt))\\
&\quad + P_{n+1}(t)\cdot(\mu_{n+1}dt+o(dt)) + \sum_{\substack{k=0\\k\neq n-2\\k\neq n\\k\neq n+1}}^{+\infty} P_k\cdot o(dt)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{P_n(t+dt)-P_n(t)}{dt} &= P_{n-2}(t)\cdot L_{n-2} - P_n(t)\cdot(L_n+\mu_n) + P_{n+1}(t)\cdot\mu_{n+1} + \sum_{k=0}^{+\infty} P_k\cdot o(1)\\
\frac{P_n(t+dt)-P_n(t)}{dt} &= P_{n-2}(t)\cdot L_{n-2} - P_n(t)\cdot(L_n+\mu_n) + P_{n+1}(t)\cdot\mu_{n+1} + o(1)\\
\lim_{dt\to 0}\frac{P_n(t+dt)-P_n(t)}{dt} &= P_{n-2}(t)\cdot L_{n-2} - P_n(t)\cdot(L_n+\mu_n) + P_{n+1}(t)\cdot\mu_{n+1}\\
P_n'(t) &= P_{n-2}(t)\cdot L_{n-2} - P_n(t)\cdot(L_n+\mu_n) + P_{n+1}(t)\cdot\mu_{n+1}
\end{aligned}
$$

3. Donner les formules de $P_0'(t)$ et $P_1'(t)$.

▶ **Correction**

$$P_0'(t) = -P_0(t) \cdot L_0 + P_1(t) \cdot \mu_1$$
$$P_1'(t) = -P_1(t) \cdot (L_1 + \mu_1) + P_2(t) \cdot \mu_2$$

4. On suppose que le régime permanent existe. Montrer que $P_1 = \frac{L_0}{\mu_1}P_0$ et $P_2 = (L_1 + \mu_1) \cdot \frac{L_0}{\mu_1\mu_2}P_0$.

▶ **Correction**

On a $P_n'(t) = 0$ et $P_n(t) = P_n$.

$$0 = -P_0 \cdot L_0 + P_1 \cdot \mu_1$$

Donc

$$P_1 = \frac{L_0}{\mu_1}P_0$$

Et

$$0 = -P_1 \cdot (L_1 + \mu_1) + P_2 \cdot \mu_2$$
$$0 = -(L_1 + \mu_1)\frac{L_0}{\mu_1}P_0 + P_2 \cdot \mu_2$$

Donc

$$P_2 = (L_1 + \mu_1) \cdot \frac{L_0}{\mu_1\mu_2}P_0$$

On pose les notations suivantes pour $n \geq 0$:

$$NS(n) = \{I \subseteq [\![1; n]\!] | \forall i < j \in I, i + 1 \neq j\}$$
$$P(I, n) = \prod_{i \in I} \mu_i \prod_{\substack{i \notin I \\ i \leq n}} L_i$$

Par exemple $NS(5) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}\}$ et $P(\{1, 4\}, 4) = \mu_1 L_2 L_3 \mu_4$.

Remarquef : $NS(0) = \emptyset$, $P(\emptyset, 0) = 1$.

5. Montrer que, pour $n \geq 1$, $\sum_{\substack{I \in NS(n+1) \\ n+1 \in I}} P(I, n + 1) = \mu_{n+1} \sum_{\substack{I \in NS(n) \\ n \notin I}} P(I, n)$

*Indice : **ne pas** faire cette preuve par récurrence.*

▶ **Correction**

Soit un ensemble $I \in NS(n + 1)$ tel que $n + 1 \in I$. Soit $J = I\backslash(n + 1)$ alors $J \in \{J \subseteq [\![1; n]\!] | \forall i < j \in J, i + 1 \neq j\} = NS(n)$. Et par définition de $NS(n + 1)$, $n \notin I$.

Inversement si $J \in NS(n)$ tel que $n \notin J$ alors $J \cup \{n + 1\} \in NS(n + 1)$ puisque, pour tout $j \in J$, $j < n$ donc $j + 1 \neq n + 1$. Donc l'ensemble des I de $NS(n + 1)$ contenant $n + 1$ est égal à l'ensemble des J de $NS(n)$ ne contenant pas n auquel on a ajouté $n + 1$.

$\sum_{\substack{I \in NS(n+1) \\ n+1 \in I}} P(I, n + 1) = \sum_{\substack{I \in NS(n) \\ n \notin I}} P(I \cup \{n + 1\}, n + 1) = \mu_{n+1} \sum_{\substack{I \in NS(n) \\ n \notin I}} P(I, n)$.

6. Montrer que, pour $n \geq 1$, $\sum_{\substack{I \in NS(n+1) \\ n+1 \notin I}} P(I, n + 1) = L_{n+1} \cdot \sum_{I \in NS(n)} P(I, n)$

Indice : ici non plus.

▶ **Correction**

Soit $I \in NS(n+1)$ tel que $n+1 \notin I$. Alors $I \in \{I \subseteq [\![1; n+1]\!] | n+1 \notin I \text{ et } \forall i < j \in I, i+1 \neq j\}$. Donc $I \in \{I \subseteq [\![1; n]\!] | \forall i < j \in I, i+1 \neq j\}$. Donc $I \in NS(n)$. Inversement, si $I \in NS(n)$ alors par définition il ne contient pas $n+1$.

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{I \in NS(n+1)\\ n+1 \notin I}} P(I, n+1) &= \sum_{I \in NS(n)} P(I, n+1)\\ &= L_{n+1} \cdot \sum_{I \in NS(n)} P(I, n)\end{aligned}$$

7. Montrer que, pour $n \geq 1$, $\sum\limits_{I \in NS(n+1)} P(I, n+1) = L_{n+1} \cdot \sum\limits_{I \in NS(n)} P(I, n) + \mu_{n+1} \cdot \sum\limits_{\substack{I \in NS(n)\\ n \notin I}} P(I, n)$

   Indice : toujours pas.

▶ **Correction**

Soit un ensemble $I \in NS(n+1)$, alors $n+1 \in I$ ou $n+1 \notin I$.
Donc $\sum\limits_{I \in NS(n+1)} P(I, n+1) = \sum\limits_{\substack{I \in NS(n+1)\\ n+1 \in I}} P(I, n+1) + \sum\limits_{\substack{I \in NS(n+1)\\ n+1 \notin I}} P(I, n+1)$.
Le résultat se déduit immédiatement des deux questions précédentes.

8. Montrer que, pour $n \geq 1$, $P_n = \sum\limits_{I \in NS(n-1)} P(I, n-1) \cdot \frac{L_0}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i} P_0$

   Indice : utiliser les trois questions précédentes et, oui, cette fois vous pouvez utiliser une preuve par récurrence

▶ **Correction**

Pour $n = 1$, on a $P_1 = \frac{L_0}{\mu_1} P_0 = P(\emptyset, 0) \frac{L_0}{\mu_1} P_0 = \sum\limits_{I \in NS(0)} P(I, 0) \cdot \frac{L_0}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i} P_0$.

Pour $n = 2$, on a $P_2 = (L_1 + \mu_1) \cdot \frac{L_0}{\mu_1 \mu_2} P_0 = (L_1 + \mu_1) \cdot \frac{L_0}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i} P_0$. Aussi, $NS(1) = \{\emptyset, \{1\}\}$ et $P(\emptyset, 1) = L_1$ ett $P(\{1\}, 1) = \mu_1$. Donc on a bien $(L_1 + \mu_1) = \sum\limits_{I \in NS(1)} P(I, 1)$.

Pour $n = 3$, on prouve de même que $(L_2 L_1 + L_2 \mu_1 + \mu_2 L_1) \cdot \frac{L_0}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} P_0$. (Le dire pour $n = 3$ est nécessaire car la récurrence va aller jusqu'à 3 crans en arrière).
Supposons la propriété vraie pour tout $k \leq n$ et vérifions là pour $n+1$. On sait que $0 = P_{n-2} \cdot L_{n-2} - P_n \cdot (L_n + \mu_n) + P_{n+1} \cdot \mu_{n+1}$. Donc :

$$P_{n+1} = \frac{1}{\mu_{n+1}} \left(P_n \cdot (L_n + \mu_n) + P_{n-2} \cdot L_{n-2}\right)$$

Par hypothèse de récurrence

$$P_{n+1} = \left((L_n + \mu_n) \cdot \sum_{I \in NS(n-1)} P(I, n-1) \cdot \frac{L_0}{\prod\limits_{i=1}^{n} \mu_i} P_0 + L_{n-2} \cdot \sum_{I \in NS(n-3)} P(I, n-3) \cdot \frac{L_0}{\prod\limits_{i=1}^{n-2} \mu_i} P_0 \right) \frac{1}{\mu_{n+1}}$$

$$P_{n+1} = \left((L_n + \mu_n) \cdot \sum_{I \in NS(n-1)} P(I, n-1) - \mu_n \mu_{n-1} L_{n-2} \cdot \sum_{I \in NS(n-3)} P(I, n-3) \right) \frac{L_0 P_0}{\prod\limits_{i=1}^{n+1} \mu_i}$$

D'après la question 7, on a l'égalité suivante :

$$(L_n + \mu_n) \cdot \sum_{I \in NS(n-1)} P(I, n-1) = \sum_{I \in NS(n)} P(I, n) + \mu_n \cdot \sum_{\substack{I \in NS(n-1) \\ n-1 \in I}} P(I, n-1)$$

$$P_{n+1} = \left(\sum_{I \in NS(n)} P(I, n) + \mu_n \cdot \sum_{\substack{I \in NS(n-1) \\ n-1 \in I}} P(I, n-1) - \mu_n \mu_{n-1} L_{n-2} \cdot \sum_{I \in NS(n-3)} P(I, n-3) \right) \frac{L_0 P_0}{\prod_{i=1}^{n+1} \mu_i}$$

D'après la question 6, on a l'égalité suivante :

$$L_{n-2} \cdot \sum_{I \in NS(n-3)} P(I, n-3) = \sum_{\substack{I \in NS(n-2) \\ n-2 \notin I}} P(I, n-2)$$

$$P_{n+1} = \left(\sum_{I \in NS(n)} P(I, n) + \mu_n \cdot \sum_{\substack{I \in NS(n-1) \\ n-1 \in I}} P(I, n-1) - \mu_n \mu_{n-1} \sum_{\substack{I \in NS(n-2) \\ n-2 \notin I}} P(I, n-2) \right) \frac{L_0 P_0}{\prod_{i=1}^{n+1} \mu_i}$$

D'après la question 5, on a l'égalité suivante :

$$\mu_{n-1} \sum_{\substack{I \in NS(n-2) \\ n-2 \notin I}} P(I, n-2) = \sum_{\substack{I \in NS(n-1) \\ n-1 \in I}} P(I, n-1)$$

$$P_{n+1} = \left(\sum_{I \in NS(n)} P(I, n) + \mu_n \cdot \sum_{\substack{I \in NS(n-1) \\ n-1 \in I}} P(I, n-1) - \mu_n \sum_{\substack{I \in NS(n-1) \\ n-1 \in I}} P(I, n-1) \right) \frac{L_0 P_0}{\prod_{i=1}^{n+1} \mu_i}$$

$$P_{n+1} = \left(\sum_{I \in NS(n)} P(I, n) \right) \frac{L_0 P_0}{\prod_{i=1}^{n+1} \mu_i}$$

Par théorème de récurrence, la preuve est faite.

9. 60 personnes arrivent chaque heure en moyenne et 35 personnes sortent chaque demi-heure en moyenne. Quelle est la valeur de P_8 ?

▶ **Correction**

Avant toute chose, il faut bien calculer L_i et μ_i. On a $\mu_i = 2\mu = 70$ et $L = \lambda/2 = 30$ (puisqu'il y a 30 couples par heure).

En codant le calcul ci-dessus, on peut calculer P_0 avec $\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{I \in NS(n-1)} P(I, n-1) \cdot \frac{L_0}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i} \right)^{-1}$.

On estime grossièrement avec la somme tronquée avec ses 30 premiers termes. On arrive à peu près à $1/6 = 0.16$.
On calcule enfin $P_8 = \sum_{I \in NS(7)} P(I, 7) \cdot \frac{L_0}{\prod_{i=1}^{8} \mu_i} P_0 = 0.29/6 \simeq 4.8410^{-2}$.

Détail intéressant, si on prend un file d'attente classique (1 arrivée à la fois) avec $\lambda = 60$ et $\mu = 70$, alors le résultat de P_8 avec les deux modèles est assez similaire, la différence est inférieure à 10^{-2}.