Chapitre 4 : Réductions et complétude

ENSIIE - Théorie de la complexité

Dimitri Watel (dimitri.watel@ensiie.fr)

2017

Réduction polynomiale et complétude

Parmi tous les slides de ce cours, comprendre celui ci est primordial, quand on a compris pourquoi on transforme des problèmes en d'autres problèmes, on arrive beaucoup mieux à assimiler ce cours.

Idée de base

Une manière de résoudre un problème Π_1 est de le transformer en un autre Π_2 qu'on sait résoudre.

Si la transformation est rapide et que le problème Π_2 peut être résolu rapidement, alors Π_1 peut être résolu rapidement.

Si la transformation est rapide et que le problème Π_1 ne peut être résolu rapidement, alors Π_2 ne peut être résolu rapidement.

FONDAMENTNAL

Réduction polynomiale de Karp

Définition (informelle)

Soit deux problèmes de décision Π_1 et Π_2, une réduction polynomiale de Π_1 vers Π_2 transforme en temps polynomial toute instance positive (resp. negative) de Π_1 en une instance positive (resp. negative) de Π_2.

Si Π_1 se réduit à Π_2, alors on dit que Π_2 est *plus difficile* que Π_1.

Il est important de transformer les instances positives en instances positives et non négatives (et inversement). J'expliquerai plus tard si j'ai le temps.

Réduction polynomiale de Karp

Définition

Soit deux problèmes de décision Π_1 et Π_2, une réduction polynomiale de $\Pi_1 = (\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^1_Y, \mathcal{L}^1_N)$ vers $\Pi_2 = (\mathcal{L}^2, \mathcal{L}^2_Y, \mathcal{L}^2_N)$ est un algorithme $\mathcal{R}$ tel que

- $\mathcal{R}$ a une complexité polynomiale
- $\mathcal{R}$ prend en entrée une instance $\mathcal{I}$ de Π_1 et renvoie en sortie une instance $\mathcal{J}$ de Π_2
- $\mathcal{I} \in \mathcal{L}^1_Y \Leftrightarrow \mathcal{J} \in \mathcal{L}^2_Y$

On note $\Pi_1 \preccurlyeq \Pi_2$.

Ces 3 propriétés font que PI1 est plus facile que PI2.
Si on sait résoudre PI2, alors pour résoudre une instance I de PI1, on résoud J = R(I), ce qui nous donne le résultat pour I. Le temps de résolution est le temps de calcul de R(I) (polynomial) + le temps de résolution de R(I). Donc si on sait résoudre PI2 en temps polynomial on sait résoudre PI1 en temps polynomial.

Difficulté

Problème $\mathcal{C}$-difficile

Soit $\mathcal{C}$ une classe de complexité (NP, EXPTIME, ...) et Π_1 un problème de décision. On dit que Π_1 est $\mathcal{C}$-Difficile si, pour tout problème Π_2 de $\mathcal{C}$, $\Pi_2 \preccurlyeq \Pi_1$.

Cf slide 17 du tableau

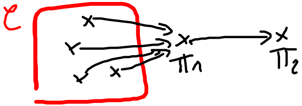
Complétude

Problème $\mathcal{C}$-complet

Soit $\mathcal{C}$ une classe de complexité (NP, EXPTIME, ...) et Π un problème de décision. On dit que Π est $\mathcal{C}$-Complet si $\Pi \in \mathcal{C}$ et s'il est $\mathcal{C}$-difficile.

Cf Slide 17 du tableau

Résultats importants



Démontrer la difficulté

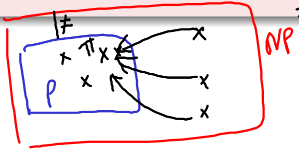
- Si Π_1 est $\mathcal{C}$-Difficile et si $\Pi_1 \preccurlyeq \Pi_2$ alors Π_2 est $\mathcal{C}$-Difficile.

P et NP

- Si $\Pi_2 \in$ P et $\Pi_1 \preccurlyeq \Pi_2$, alors $\Pi_1 \in$ P.
- Si $\Pi_2 \in$ NP et $\Pi_1 \preccurlyeq \Pi_2$, alors $\Pi_1 \in$ NP.
- P $\neq$ NP $\Leftrightarrow \forall$ problème Π NP-Complet, $\Pi \notin P$.
- 3-SAT est NP-Complet.

si $\Pi \in P$ et Π NP-complet, $\forall \Pi' \in NP$ $\Pi' \leq \Pi$ $\Rightarrow \Pi' \in P$

→ Prouver que Π est NP-Complet
→ tq $\Pi \in NP$
et tq $3SAT \leq \Pi$



$\Rightarrow P = NP$

Réduction polynomiale de Turing

Définition : Réduction polynomiale de Turing

Soient deux problèmes Π_1 et Π_2, une réduction polynomiale de Turing de Π_1 vers Π_2 est un algorithme $\mathcal{R}$ tel que

- $\mathcal{R}$ peut appeler un algorithme $\mathcal{R}'$ (imaginaire), appelé *oracle*, résolvant Π_2 en temps constant ;
- $\mathcal{R}$ résoud Π_1 en temps polynomial.

On note $\Pi_1 \preccurlyeq_T \Pi_2$.

Π_1 et Π_2 ne sont pas nécessairement des problèmes de décision.

Autres réductions

- Réduction exponentielle
- Réduction en espace polynomial
- Réduction probabiliste
- ...