

TP 1 : Prise en main avec le simulateur Quirk

UE Informatique quantique et Recherche opérationnelle
Module 1 : Informatique quantique

8 novembre 2022

ENSIIE, C. Grange

Tout au long du TP, les questions à faire sur papier sont précédées du symbole †.

Ce TP a pour but d'apprendre à manipuler les concepts de base de l'informatique quantique. Pour visualiser cela, nous avons utilisé un simulateur de circuit quantique open source du nom de Quirk.

Pour démarrer ce TP, aller sur Quirk : <https://algassert.com/quirk>. Commencer par prendre en main l'outil et comprendre la représentation des amplitudes ("final amplitudes").

Exercice 1 (Changement de base et Sphère de Bloch).

1. † Montrer que $|+\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ et $|-\rangle = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$ forment une base pour la description d'un qubit.
2. † Trouver la représentation matricielle de la porte quantique qui transforme la base $(|0\rangle, |1\rangle)$ en $(|+\rangle, |-\rangle)$.
3. † Retrouver la représentation matricielle de la porte NOT dans la base $(|0\rangle, |1\rangle)$, puis dans la base $(|+\rangle, |-\rangle)$.
4. Visualiser l'effet de ces portes sur Quirk en s'appropriant la lecture de la sphère de Bloch.
5. Vérifier, en regardant l'effet sur la sphère de Bloch de chaque porte, l'équivalence entre Z et HXH .
6. Trouver un exemple, en utilisant la représentation de la sphère de Bloch, qui illustre l'importance de l'ordre dans lequel on applique les portes quantiques.

Pour tester les circuits que vous allez créer dans la suite de ce TP, vous pouvez créer n'importe quel qubit avec une porte que vous implémentez vous même avec le bouton Make Gate.

Exercice 2 (Porte SWAP).

La porte CNOT = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ s'applique à deux qubits de façon asymétrique. Le premier

qubit $|q_0\rangle$ est le qubit de contrôle ("control qubit") et le second $|q_1\rangle$, le qubit cible ("target qubit"). Sa représentation en circuit est donnée Figure 1.

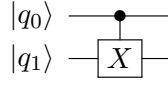


Figure 1: Porte CNOT.

1. † Montrer que la porte CNOT effectue l'opération suivante :

$$\text{CNOT}(|q_0\rangle \otimes |q_1\rangle) = |q_0\rangle \otimes |q_0 \oplus q_1\rangle ,$$
où $\oplus$ est l'addition de bits modulo 2.
2. † On appelle la porte SWAP entre deux qubits q_0 et q_1 la porte qui échange les états des deux qubits. A l'aide de la Question 1, montrer que le circuit de la Figure 2 est équivalent à une porte SWAP.

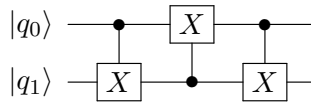


Figure 2: Porte SWAP.

3. Implémenter la porte SWAP sur Quirk et vérifier le résultat avec la sphère de Bloch.

Exercice 3 (Circuits logiques mystères).

Dans cet exercice, nous allons manipuler et implémenter quelques formules logiques.

On considère le circuit Figure 3 ci-dessous.

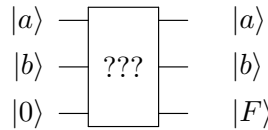


Figure 3: Circuit mystère.

Trouver les circuits mystères pour les différentes formules logiques F qui suivent, puis les implémenter sur Quirk.

1. $F = a \wedge b$. Indice : on utilisera plusieurs fois la notion de qubits de contrôle, notion illustrée sur la porte CNOT.
2. $F = a \vee b$. Indice : reformuler F pour utiliser la Question 1.
3. $F = a \implies b$.

Exercice 4 (Somme d'entiers).

Nous allons coder la somme d'entiers en écriture binaire. Pour commencer, nous considérons le circuit à trou suivant :

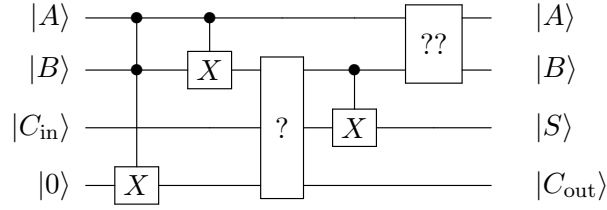


Figure 4: Circuit de la somme avec retenue.

1. † Trouver les opérations manquantes de sorte que le circuit exécute la somme de $|A\rangle$ et $|B\rangle$, avec une possible retenue (carry) en entrée $|C_{in}\rangle$, et qui donne en sortie $|S\rangle$, avec une potentielle retenue en sortie $|C_{out}\rangle$.
2. Implémenter ce circuit sur Quirk.
3. Trouver le circuit de la somme de deux entiers A et B , chacun dans $\llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$. L'implémenter pour $n = 2$, en faisant en sorte que les qubits de sortie soient tous regroupés sur les derniers qubits du circuit en utilisant des portes SWAP.
4. Regarder la distribution obtenue sur les qubits de sortie si l'on mets une porte H devant chaque qubits de la représentation binaire de A et B en entrée. Expliquer ce que l'on observe.

Exercice 5 (Etats de Bell et téléportation quantique).

Préliminaires :

On appelle états de Bell les quatre états suivants :

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

$$|\beta_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

$$|\beta_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$|\beta_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

1. † Montrer que les états de Bell forment une base pour les systèmes à 2 qubits.
2. Écrire un circuit sur Quirk qui produit l'état $|\beta_{xy}\rangle$ à partir de l'état $|xy\rangle$ pour tout $x, y \in \{0, 1\}$.
3. † Prouver que l'état $|\beta_{01}\rangle$ est un état intriqué.

Téléportation du secret d'Alice :

Alice souhaite envoyer un état secret $|\psi\rangle$ à Bob, qui est parti vivre sur Mars. Avant ce long périple, Alice et Bob ont partagé l'état de Bell intriqué

$$|\beta_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle),$$

dont Alice détient le premier qubit et Bob le second. De plus, ils ont à disposition un canal classique entre la Terre et Mars, mais qui n'est pas sécurisé. Nous allons voir comment Alice peut transmettre $|\psi\rangle$ à Bob en toute sécurité.

Le système quantique considéré est composé de deux sous-systèmes $\mathcal{S}_S \otimes \mathcal{S}_{AB}$: le premier est celui du secret (S), tandis que le deuxième est celui partagé par Alice et Bob (AB). L'état initial de ce système est

$$|\psi\rangle_S \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{AB} + |10\rangle_{AB}).$$

On écrit par la suite $|\psi\rangle_S = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.

Dans un premier temps, Alice mesure son système à deux qubits S et A dans la base des états de Bell. Cette mesure se fait comme ceci :

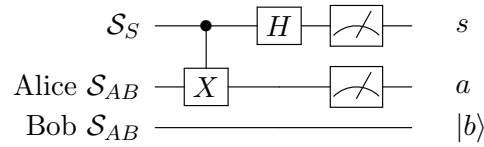


Figure 5: Mesure de Bell.

4. Vérifier que cette mesure indique bien dans quel état de Bell est le système $\mathcal{S}_S \otimes \mathcal{S}_A$.
5. † Alice transmet à Bob, via le canal classique, le résultat de la mesure de Bell qui sont les deux bits (s, a) en sortie. Quel est l'état du qubit $|b\rangle$ de Bob dans chacun des cas ?
6. † En fonction de l'information que donne Alice à Bob, ce dernier sait exactement quelles opérations il doit appliquer à son qubit pour obtenir le secret $|\psi\rangle$. Quelles sont-elles ?

Indices : les opérations sont simples ! Les portes I , X , Y , Z suffiront...

7. Construire le circuit Quirk de la téléportation, où l'information classique donnée à Bob par Alice est remplacée par un circuit unitaire qui synthétise les différents cas. Vérifier qu'il fonctionne en créant un secret quelconque avec une porte faite main (bouton Make Gate).